

Aula

6

Reconciliação e análise de qualidade de dados

“Quem tem um relógio, sabe que horas são, quem tem dois relógios tem dúvida”
Anônimo

Reconciliação de Dados

Conceitos Básicos:

Com o advento de sistemas automatizados de coleta de dados representados por PLCs, sistemas supervisórios e PIMS, o aspecto de se obter e encaminhar dados transformando-os em informações foi resolvido. Entretanto, quando tentamos utilizar os dados verificamos que os dados não obedecem equações de balanço.

Por estas equações, tudo o que saiu de um contorno fechado é igual a tudo que entrou menos o que está armazenado no contorno ou:

$$\Sigma (\text{saídas}) = \Sigma (\text{entradas}) - \text{Armazenado}$$

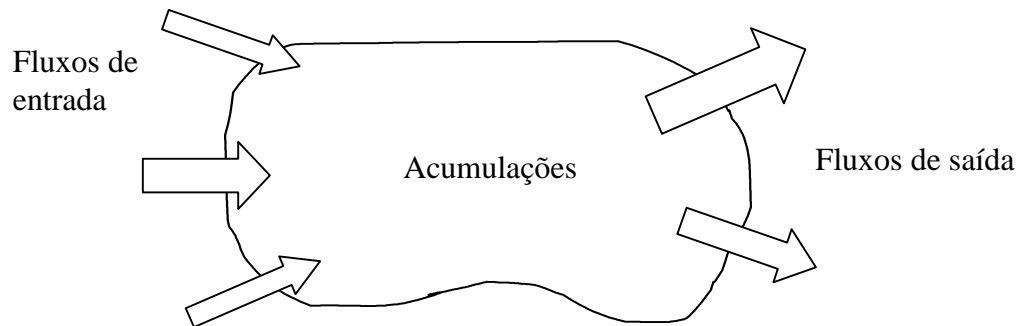


Figura 1: Balanço das totalizações dos fluxos externos a um contorno.

Por que um balanço de massas não fecha ?

Porque os dados colhidos são muitas vezes inconsistentes. As totalizações das entradas e saídas dos equipamentos de processo, considerando-se as acumulações, como tanques, pilhas de homogeneização de minérios etc., estão sempre numa situação de balanço matemático, mas as medidas coletadas não.

Os erros são devidos a:

- Erro de medição aleatório
- Instrumento descalibrado
- Modelamento inadequado
- Amostragem na frequência incorreta
- Não linearidade do instrumento
- Densidade incorreta ou variando com temperatura
- Polarização de leitura do instrumento
- Leitura fora de faixa do instrumento
- Erro de transmissão do sinal

Etc.

A maneira usual de se contornar este problema consiste em se atribuir maior grau de confiança para determinadas medidas baseado em algum conhecimento empírico do funcionamento da planta e de se alterar os dados artificialmente. O nosso objetivo neste capítulo é fornecer um método matemático independente de crenças e comportamentos emotivos para se recalcular o valor mais provável para as medidas efetuadas.

A natureza aleatória dos erros

A figura 2 descreve a curva de distribuição das leituras de um instrumento após realizar infinitas leituras de um mesmo valor T . O valor real da medida corresponde a T . A função distribuição é uma gaussiana de média μ e desvio padrão σ . A diferença entre a média das medidas e o valor real é denominado **polarização** (*bias*) e corresponde a um desvio sistemático do valor desejado. Quando um conjunto de medidas possui baixo valor de polarização, dizemos que possui exatidão (*accuracy*). A **precisão** (*precision*) ou erro aleatório, é dada pelo dobro do desvio padrão das medições realizadas. Estatisticamente podemos garantir que 95% das medidas estarão na faixa entre $\mu - 2\sigma$ e $\mu + 2\sigma$.

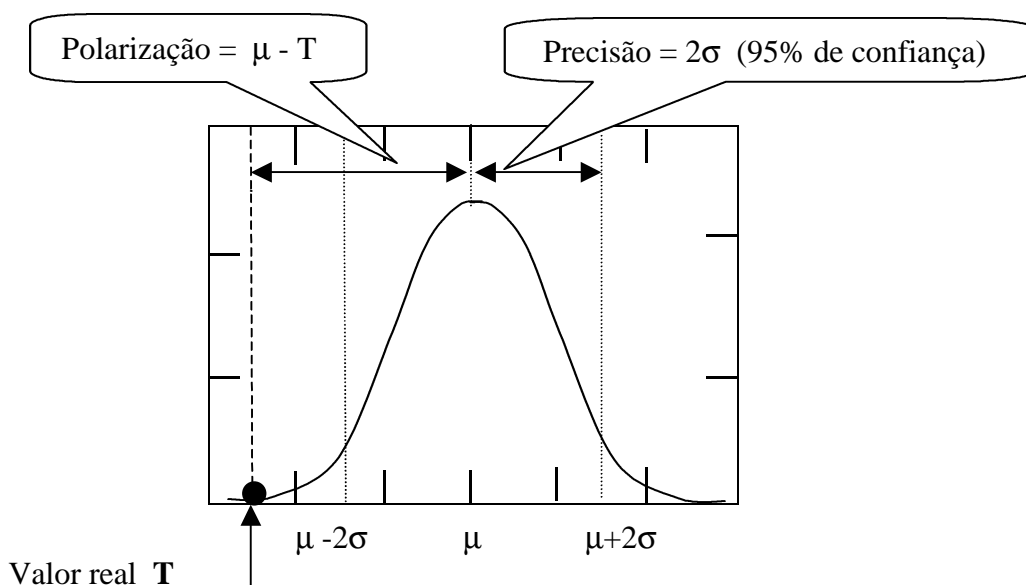


Figura 2: Polarização e precisão.

A incerteza da medida é definida como:

$$\text{Incerteza} = \sqrt{(\text{polarização}^2 + \text{precisão}^2)}$$

A figura 3 fornece outra representação gráfica do mesmo conceito:

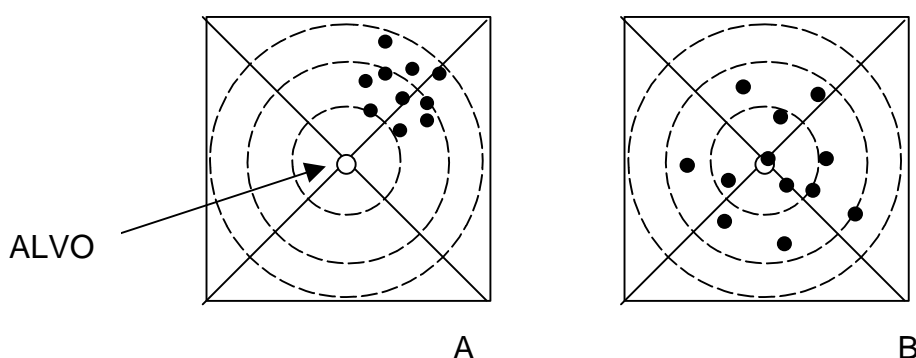


Figura 3: A: sinal com baixa exatidão e alta precisão
B: sinal com alta exatidão com baixa precisão.

Exercício:

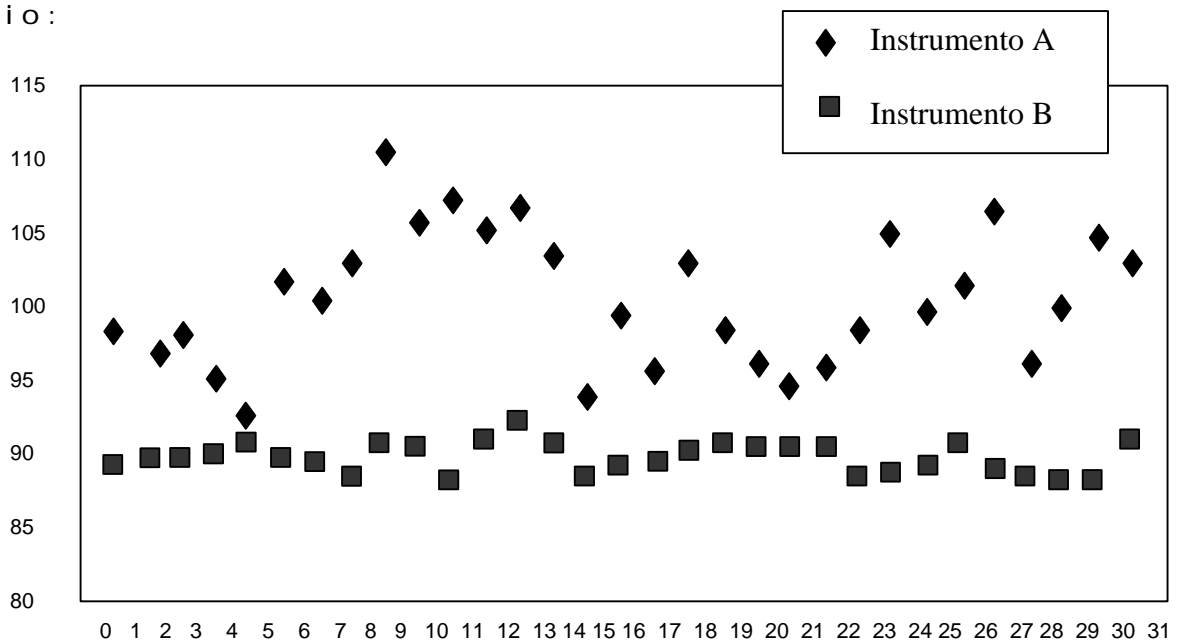


Figura 4: Amostras de dois medidores

O gráfico da figura 4 mostra a leitura do valor da vazão de um líquido mantida constante durante o intervalo de medida. O valor exato do fluxo é conhecido e é igual a 100.

A média e o desvio padrão dos dados foi calculada como sendo:

	Instrumento A	Instrumento B
Média (μ)	100.4	89.8
Desvio padrão (σ)	4.26	0.52
Bias		
Precisão		
Incerteza		

Calcule o bias, a precisão e a incerteza para os dois instrumentos.

Recalibrando um instrumento o seu bias pode ser removido.

Que instrumento valeria a pena recalibrar ?

Na prática, o grande problema é que não conhecemos o valor medido. Os instrumentos são recalibrados fora de linha e depois reinstalados na planta.

Reconciliação de dados

Reconciliação de dados é um método ou algoritmo que permita ajustar os valores das medidas realizadas para que a equação de balanço de massas seja obedecida. Por este processo deve-se atribuir maior erro ao instrumento de maior incerteza.

Existem vários métodos utilizados para ajustar os dados.

Método estatístico:

Busca minimizar a função objetivo:

$$F_n = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\text{Medida}_i - \text{Valor Reconciliado}_i}{\text{Incerteza}_i} \right]^2$$

Onde:

N	Número de amostras
Medida _i	Medida feita pelo instrumento de ordem i
ValorReconciliado _i	Valor reconciliado calculado para o instrumento de ordem i
Incerteza _i	Incerteza do instrumento de ordem i.

A precisão da medida final irá depender de como a medida é feita e da precisão das medidas individuais. O próximo exemplo analisa esta questão.

Vamos supor que o instrumento M1 tenha precisão de 0.5% e polarização 0. Os demais instrumentos tem precisão de 1% e polarização 0.

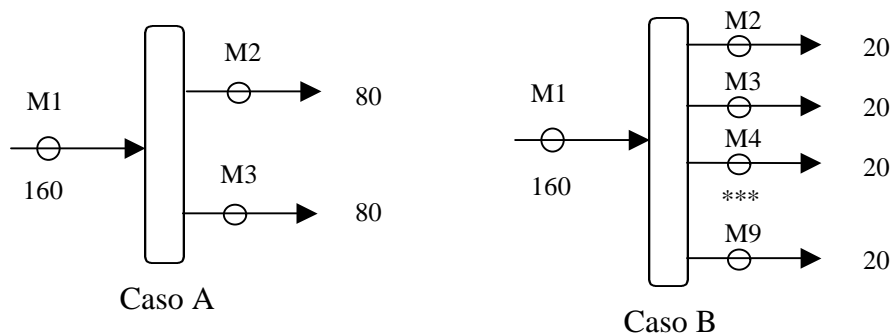


Figura 5: Comparando precisões

Observe as situações ilustradas na figura 5.

Caso A

Medida do instrumento M1: 160 ± 0.8 tons.

Medida dada pela soma das leituras de M2 e M3 e

$$(80 + 80) \pm \sqrt{(0.8^2 + 0.8^2)} = 160 \pm 1,13 \text{ tons}$$

A leitura de M1 é mais precisa.

Caso B

Medida do instrumento M1: 160 ± 0.8 tons

Medida dada pela soma das leituras de M2...M9:

$$(8 * 20) \pm \sqrt{8 * 0.2^2} = 160 \pm 0,57 \text{ tons} .$$

É mais preciso calcular a leitura pela soma das medidas M2..M9.

Observações:

A média da soma de duas distribuições gaussianas é a soma das médias.

O desvio padrão da soma de duas distribuições gaussianas é a raiz quadrada da soma dos quadrados dos desvios padrões das distribuições combinadas.

Minimização de funções multivariáveis utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange.

O método dos multiplicadores de Lagrange foi desenvolvido pelo matemático Joseph Louis Lagrange (1736 e 1813), nascido em Turim, mas que teve Frederico o grande da Prússia e Louis XVI da França como seus grandes patronos. Lagrange, Laplace, Legendre, Carnot, Monge e Condorcet são considerados como os matemáticos da revolução francesa, porque viveram neste período conturbado da história. Lagrange, desenvolveu um método para encontrar o mínimo ou máximo de uma função multivariável, sujeita a uma ou várias condições de restrição, dadas por equações [Boyer 1974].

Apresentação do método para funções de duas variáveis:

Seja $f(x,y)$ a função a ser minimizada e $\varphi(x,y) = 0$ a equação de restrição ou constrangimento a ser obedecida.

Lagrange define uma função auxiliar $F(x, y, \lambda)$ tal que:

$$F(x, y, \lambda) = F(x, y) + \lambda \varphi(x,y)$$

λ é denominado multiplicador de Lagrange.

No ponto de mínimo (máximo) da função, as derivadas parciais da função em relação a x e a y se anulam e podemos escrever:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{array} \right.$$

Temos três equações a 3 incógnitas; x , y e λ e portanto podemos resolver o problema.

Observe que o fato das derivadas parciais se anularem no ponto de máximo ou mínimo é uma condição necessária e não suficiente. Após encontrar o resultado, devemos verificar se o ponto corresponde a um máximo ou mínimo.

Interpretação geométrica para visualização do método:

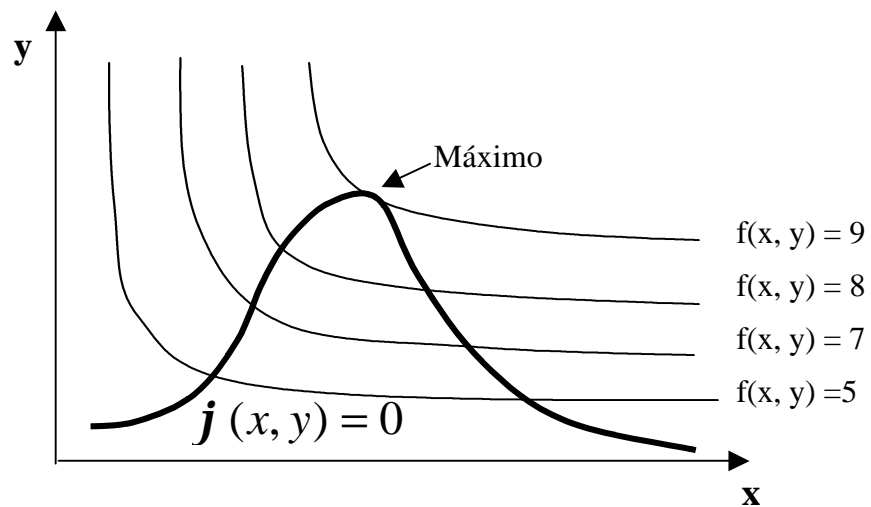


Figura 6: Caso bidimensional: interpretação geométrica.

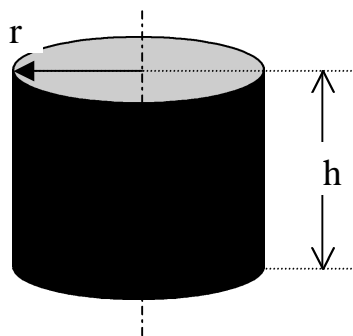
Nós devemos maximizar a função $f(x,y)$. Como o ponto deve satisfazer à equação $\varphi(x,y)=0$, então o ponto deve pertencer a esta curva. O ponto de máximo será encontrado variando-se a curva $f(x,y)=k$ até que ela toque a curva de restrição pela última vez, isto é até que as duas curvas sejam tangentes. Neste ponto os gradientes das duas funções, perpendicular às curvas, serão paralelos.

Algebricamente temos: $\text{grad}[f(x,y)]_{[x,y]} = t * \text{grad}[\varphi(x,y)]_{[x,y]}$ ou:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right] = t * \left[\frac{\partial j}{\partial x}(x,y), \frac{\partial j}{\partial y}(x,y) \right]$$

onde t é um escalar. Temos duas equações a 3 incógnitas mais a equação de restrição, o que nos dá três equações a 3 variáveis. T corresponde ao multiplicador de Lagrange.

Exemplo 1:



Dispõem-se de 6π metros quadrados de folha de alumínio.
Deve-se utilizar esta folha para construir um cilindro de volume máximo.
Determinar a altura e o raio do cilindro.

A área de um cilindro é dada por:

$$A = 2 * \pi * r^2 + 2 * \pi * r * h = 6\pi$$

O volume é dado por:

$$V = \pi * r^2 * h$$

Nos devemos minimizar $V(r, h)$ dada a restrição $A(r, h) = 0$.

Constrói-se a função auxiliar:

$$F(r, h, \lambda) = \pi r^2 h + \lambda (2 \pi r^2 + 2 \pi r h - 6\pi)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial r} \rightarrow \pi r h + \lambda (4 \pi r + 2 \pi h) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial h} \rightarrow \pi r^2 + 2 \pi r = 0 \\ 2 \pi r^2 + 2 \pi r h - 6\pi = 0 \end{array} \right.$$

Resolvendo este sistema chegamos a:

$$\lambda = -0.5r$$

$$h = 2r$$

$$r = 1 \Rightarrow h = 2$$

Caso multivariável.

Devemos minimizar $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

Sujeito a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ \varphi_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ \varphi_m(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right.$$

Vamos definir a função auxiliar:

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + \lambda_2 \varphi_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m \varphi_m(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_3} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} = 0 \end{array} \right.$$

No total temos n equações, uma para cada variável da função sendo minimizada, mais m restrições, o que forma um conjunto de n+m equações a n+m variáveis. Resolvendo o sistema determinamos o ponto crítico. Finalmente devemos verificar se o ponto corresponde a um máximo, mínimo ou simplesmente a um ponto de inflexão.

Aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange ao problema do balanço de massas

Adotando o critério dos mínimos quadrados, definimos uma função a ser minimizada, correspondendo à soma ponderada dos quadrados dos erros.

Sendo M_i a medida obtida para um fluxo e \hat{M}_i a medida corrigida para o mesmo

fluxo, o erro E_i é dado por: $E_i = M_i - \hat{M}_i$

E o erro quadrático será $E_i^2 = (M_i - \hat{M}_i)^2$

Nós vamos escolher como peso para cada erro o inverso do desvio padrão.

Finalmente a função objetivo a ser minimizada será:

$$F(\hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{M}_3, \dots, \hat{M}_n) = \sum_1^n \frac{1}{S^2} (M_i - \hat{M}_i)^2$$

As equações:

$$j_1(\hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{M}_3, \dots, \hat{M}_n) = 0, j_m(\hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{M}_3, \dots, \hat{M}_n) = 0,$$

uma para cada nodo do circuito, constituem as m equações de constrangimento para o problema.

A equação auxiliar fica:

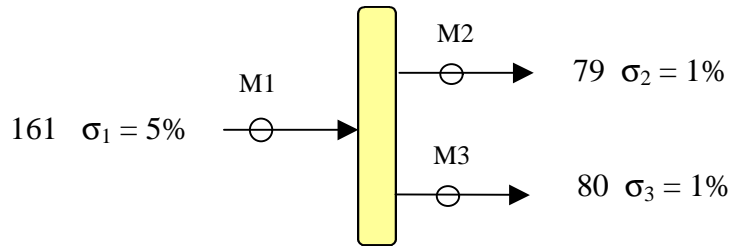
$$\Phi = \sum_1^n \frac{1}{S^2} (M_i - \hat{M}_i)^2 + \sum_1^n l_j j_i = 0$$

Achando as derivadas parciais da função para variável \hat{M}_i e igualando a zero temos n equações, uma para cada medida:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial \hat{M}_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \hat{M}_2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \hat{M}_3} = 0 \\ \text{*****} \\ \frac{\partial f}{\partial \hat{M}_n} = 0 \end{array} \right.$$

Em conjunto com as m equações de restrição Φ_m temos um sistema de $n+m$ equações a $n+m$ incógnitas, que deve ser resolvido.

Exemplo 2



Vamos fazer o balanço do sistema acima.

N = número de medidas = 3.

M = número de nodos = 1

O vetor de medidas é dado por:

$$m = [M_1 \quad M_2 \quad M_3] = [161 \quad 79 \quad 80]$$

O vetor de desvios percentuais é dado por:

$$p = [s_1 \quad s_2 \quad s_3] = [0.05 \quad 0.01 \quad 0.01]$$

O vetor de desvios absolutos, usando a notação do Matlab, pode ser calculado como:

$$a = m .* p = [8.05 \quad 0.79 \quad 0.80]$$

A partir de agora, estaremos trabalhando com os desvios absolutos.

$$\hat{M}_1 - \hat{M}_2 - \hat{M}_3 = 0.$$

$$F(\hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{M}_3) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{a_i^2} (M_i - \hat{M}_i)^2$$

$$\Phi = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{a_i^2} (M_i - \hat{M}_i)^2 + I_1 (\hat{M}_1 - \hat{M}_2 - \hat{M}_3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{M}_1} = -\frac{2}{a_1^2} (M_1 - \hat{M}_1) + I_1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{M}_2} = -\frac{2}{a_2^2} (M_2 - \hat{M}_2) - I_1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{M}_3} = -\frac{2}{a_3^2} (M_3 - \hat{M}_3) - I_1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial I_1} = \hat{M}_1 - \hat{M}_2 - \hat{M}_3 = 0$$

Em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{a_1^2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{a_2^2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{a_3^2} & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \\ \hat{M}_3 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2M_1}{a_1^2} \\ \frac{2M_2}{a_2^2} \\ \frac{2M_3}{a_3^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \\ \hat{M}_3 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{a_1^2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{a_2^2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{a_3^2} & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} \frac{2M_1}{a_1^2} \\ \frac{2M_2}{a_2^2} \\ \frac{2M_3}{a_3^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

O vetor de correções será dado por:

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \\ \hat{M}_3 \end{bmatrix}$$

A solução é dada pelo programa em Matlab abaixo:

```
% reconcilia.m
```

```
% Medidas
```

```
m=[161 79 80]
```

```
% Tolerâncias
```

```
p=[0.05 0.01 0.01 ]
```

```
% tolerâncias absolutas
```

```
a=m.*p
```

```
% Calcula vetor
```

```
% mpeso = [ 2*m(1)/a(1)^2;
```

```
%          2*m(2)/a(2)^2;
```

```
%          2*m(3)/a(3)^2;
```

```
%          0]
```

```
%
```

```
mpeso = 2*[m./(a.*a) 0]'
```

```
Diag1 = 2*inv(diag(a)^2)
```

```
% Forma matriz de pesos
```

```
%Peso = [2/a(1)^2    0    0    1;
```

```
%          0    2/a(2)^2    0    -1;
```

```
%          0    0    2/a(3)^2    -1;
```

```
%          1    -1    -1    0]
```

```
Peso= [Diag1 [1 -1 -1]'; b 0]
```

```
InvPeso = inv(Peso)
```

```
% Calcula medidas reconciliadas, multiplicadores de Lagrange
```

```
Result = InvPeso * mpeso
```

```
% Medidas reconciliadas
```

```
mrec=[Result(1) Result(2) Result(3)]
```

```
lambda = Result(4)
```

```
Correcao = m - mrec
```

Executando o programa obtém-se:

<pre> » recon b = 1 -1 -1 m = 161 79 80 p = 0.0500 0.0100 0.0100 a = 8.0500 0.7900 0.8000 mpeso = 4.9689 253.1646 250.0000 0 Diag1 = 0.0309 0 0 0 3.2046 0 0 0 3.1250 Peso = 0.0309 0 0 1.0000 0 3.2046 0 -1.0000 0 0 3.1250 -1.0000 1.0000 -1.0000 -1.0000 0 InvPeso = 0.6200 0.3061 0.3139 0.9809 0.3061 0.3091 -0.0030 -0.0094 0.3139 -0.0030 0.3169 -0.0097 0.9809 -0.0094 -0.0097 -0.0303 </pre>	<pre> Result = 159.0383 79.0189 80.0194 0.0605 mrec = 159.0383 79.0189 80.0194 lambda = 0.0605 Correcao = 1.9617 -0.0189 -0.0194 Observe que a maior correção foi atribuída a M₁ Você julga esta observação correta ? </pre>
---	---

Uso do Excel/Solver

Podemos resolver o mesmo problema utilizando o Solver, uma ferramenta de otimização produzida pela Frontline Systems, Inc., e que vem acoplada ao próprio Excel (<http://www.solver.com/solutions.htm>).

Nós devemos definir uma função objetivo que neste caso é a função erro total a ser minimizada:

$$F(\hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{M}_3) = \sum_1^3 \frac{1}{a_i} (M_i - \hat{M}_i)^2$$

Em seguida definimos as variáveis a serem determinadas:

$$\hat{m} = \begin{bmatrix} \hat{M}_1 & \hat{M}_2 & \hat{M}_3 \end{bmatrix}$$

As restrições a serem obedecidas são:

$$\hat{M}_1 - \hat{M}_2 - \hat{M}_3 = 0.$$

$$\hat{M}_1 \geq 0$$

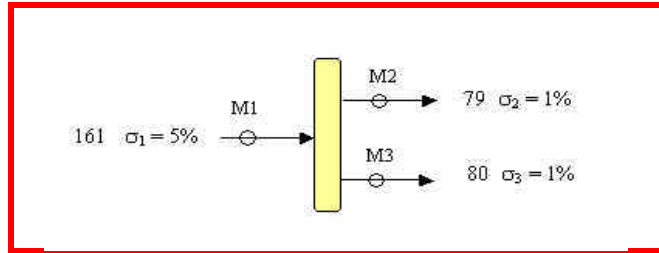
$$\hat{M}_2 \geq 0$$

$$\hat{M}_3 \geq 0$$

Agora definimos uma planilha contendo os dados do problema e acionamos a tecla *Solver* do menu *Tools*.

Caso esta tecla não esteja ativa no seu Excel, este aplicativo deve ser instalado. Clique *Tools Add-ins* e em seguida selecione *Solver*.

Balanço de Massas

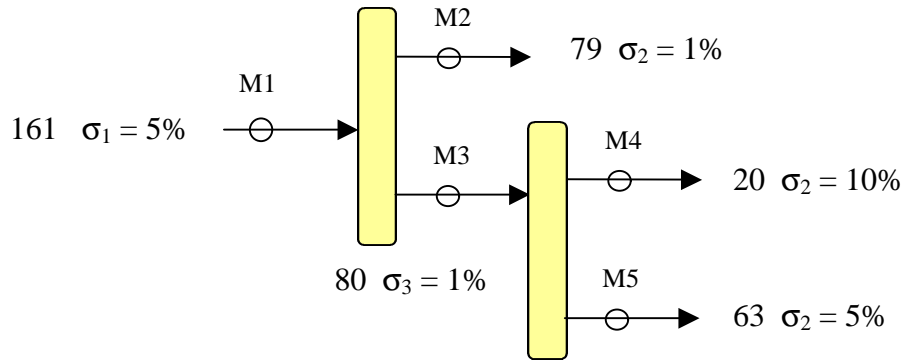


N (Número de Medidas)	3			
M (Número de Nós)	1			
Medidas	161	79	80	$m = [M_1 \ M_2 \ M_3] = [161 \ 79 \ 80]$
Desvios %	0,05	0,01	0,01	$p = [s_1 \ s_2 \ s_3] = [0.05 \ 0.01 \ 0.01]$
Desvios Abs	8,05	0,79	0,8	$a = m \cdot p = [8.05 \ 0.79 \ 0.80]$

Medidas otimizadas	159,0382	79,0189	80,0194	$\hat{M}_1 - \hat{M}_2 - \hat{M}_3 = 0$
--------------------	----------	---------	---------	---

Erros	1,9618	-0,0189	-0,0194	
Erros ²	3,8485	0,0004	0,0004	
Erros ² Pond	0,0594	0,0006	0,0006	Erro Total 0,0605

Exemplo 3



Vamos fazer o balanço do sistema acima.

N = número de medidas = 5

M = número de nodos = 2

O vetor de medidas é dado por:

$$m = [M_1 \ M_2 \ M_3 \ M_4 \ M_5] = [161 \ 79 \ 80 \ 20 \ 63]$$

O vetor de desvios percentuais é dado por:

$$p = [s_1 \ s_2 \ s_3 \ s_4 \ s_5] = [0.05 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.10 \ 0.05]$$

O vetor de desvios absolutos, usando a notação do Matlab, pode ser calculado como:

$$a = m .* p = [8.05 \ 0.79 \ 0.80 \ 6.3 \ 1.0]$$

A partir de agora, estaremos trabalhando com os desvios absolutos.

$$\hat{M}_1 - \hat{M}_2 - \hat{M}_3 = 0.$$

$$\hat{M}_3 - \hat{M}_4 - \hat{M}_5 = 0.$$

Pode-se organizar os coeficientes das equações de restrição em uma matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Como veremos esta matriz aparecerá mais à frente:

$$F(\hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{M}_3, \hat{M}_4, \hat{M}_5) = \sum_{i=1}^5 \frac{1}{2 a_i} (M_i - \hat{M}_i)^2$$

$$\Phi = \sum_{i=1}^5 \frac{1}{2 a_i} (M_i - \hat{M}_i)^2 + I_1 (\hat{M}_1 - \hat{M}_2 - \hat{M}_3) + I_2 (\hat{M}_3 - \hat{M}_4 - \hat{M}_5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{M}_1} = -\frac{2}{a_1} (M_1 - \hat{M}_1) + I_1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{M}_2} = -\frac{2}{a_2^2} (M_2 - \hat{M}_2) - \mathbf{I}_1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{M}_3} = -\frac{2}{a_3^2} (M_3 - \hat{M}_3) - \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{M}_4} = -\frac{2}{a_4^2} (M_4 - \hat{M}_4) - \mathbf{I}_2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{M}_5} = -\frac{2}{a_5^2} (M_5 - \hat{M}_5) - \mathbf{I}_2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{I}_1} = \hat{M}_1 - \hat{M}_2 - \hat{M}_3 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{I}_2} = \hat{M}_3 - \hat{M}_4 - \hat{M}_5 = 0$$

Em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{a_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{a_2^2} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{a_3^2} & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{a_4^2} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{a_5^2} & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \\ \hat{M}_3 \\ \hat{M}_4 \\ \hat{M}_5 \\ \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2M_1}{a_1^2} \\ \frac{2M_2}{a_2^2} \\ \frac{2M_3}{a_3^2} \\ \frac{2M_4}{a_4^2} \\ \frac{2M_5}{a_5^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \\ \hat{M}_3 \\ \hat{M}_4 \\ \hat{M}_5 \\ \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{a_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{a_2^2} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{a_3^2} & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{a_4^2} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{a_5^2} & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{2M_1}{a_1^2} \\ \frac{2M_2}{a_2^2} \\ \frac{2M_3}{a_3^2} \\ \frac{2M_4}{a_4^2} \\ \frac{2M_5}{a_5^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} *$$

Pode-se observar que a matriz B aparece nas últimas duas linhas da matriz a ser invertida e na sua forma transposta nas duas últimas colunas na mesma matriz.

```

% reconcilia.m
%

Nodos = 2
Medidas = 5

% Grafo: dimensão: Nodos x Medidas
B = [ 1 -1 -1 0 0;
      0 0 1 -1 -1]

% Medidas
m=[161 79 80 63 20]

% Tolerâncias
p=[0.05 0.01 0.01 0.10 0.05]

% tolerâncias absolutas
a=m.*p

% Calcula vetor
% mpeso = [ 2* m(1)/a(1)^2;
%          2* m(2)/a(2)^2;
%          2* m(3)/a(3)^2;
%          2* m(4)/a(4)^2;
%          2* m(5)/a(5)^2;
%          0;
%          0]

mpeso = 2*[m./(a.*a) zeros(1, Nodos)]'

Diag1 = 2*inv(diag(a)^2) % Matriz MxM

```

```

% Forma matriz de pesos
Peso= [Diag1 B'; B zeros(Nodos)]

InvPeso = inv(Peso)

% Calcula medidas reconciliadas, multiplicadores de Lagrange
Result = InvPeso * mpeso

% Medidas reconciliadas
mrec=[Result(1) Result(2) Result(3) Result(4) Result(5)]

lambda1 = Result(6)
lambda2 = Result(7)

Correcao = m - mrec
Os resultados são:

```

```

recon2

Nodos =
    2

Medidas =
    5

B =
    1  -1  -1  0  0
    0  0   1  -1 -1

m =
    161  79  80  63  20

p =
    0.0500  0.0100  0.0100  0.1000  0.0500

a =
    8.0500  0.7900  0.8000  6.3000  1.0000

mpeso =
    4.9689
    253.1646
    250.0000
    3.1746
    40.0000
    0
    0

Diag1 =
    0.0309  0  0  0  0
    0  3.2046  0  0  0

```

0	0	3.1250	0	0
0	0	0	0.0504	0
0	0	0	0	2.0000

Peso =

0.0309	0	0	0	0	1.0000	0
0	3.2046	0	0	0	-1.0000	0
0	0	3.1250	0	0	-1.0000	1.0000
0	0	0	0.0504	0	0	-1.0000
0	0	0	0	2.0000	0	-1.0000
1.0000	-1.0000	-1.0000	0	0	0	0
0	0	1.0000	-1.0000	-1.0000	0	0

InvPeso =

0.6152	0.3061	0.3091	0.3015	0.0076	0.9810	0.0152
0.3061	0.3091	-0.0030	-0.0029	-0.0001	-0.0094	-0.0001
0.3091	-0.0030	0.3120	0.3044	0.0077	-0.0095	0.0153
0.3015	-0.0029	0.3044	0.7846	-0.4802	-0.0093	-0.9605
0.0076	-0.0001	0.0077	-0.4802	0.4879	-0.0002	-0.0242
0.9810	-0.0094	-0.0095	-0.0093	-0.0002	-0.0303	-0.0005
0.0152	-0.0001	0.0153	-0.9605	-0.0242	-0.0005	-0.0484

Result =

159.0835
79.0185
80.0651
60.1372
19.9279
0.0591
-0.1443

mrec =

159.0835 79.0185 80.0651 60.1372 19.9279

lambda1 =

0.0591

lambda2 =

-0.1443

Correcao =

1.9165 -0.0185 -0.0651 2.8628 0.0721

Algoritmo comercial

A seguir vamos mostrar o algoritmo utilizado por um produto de mercado, o Sigmafine da OSI Software Inc.:

Seja por exemplo o fluxograma dado ao lado:

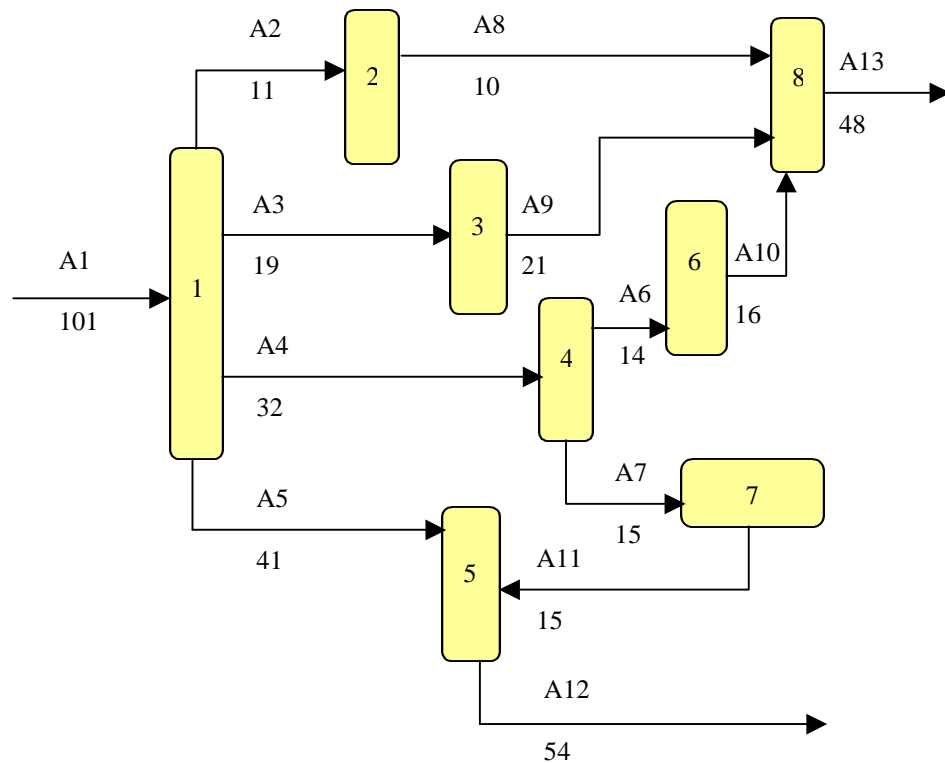


Figura 7: Fluxograma da malha a ser equacionada

Inicialmente definimos a matriz B representando a topologia do grafo acima. Para cada nodo do grafo teremos uma equação correlacionando algumas das 13 variáveis de fluxo:

Nodo	Equação
1	$-a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0$
2	$-a_2 + a_8 = 0$
3	$-a_3 + a_9 = 0$
4	$-a_4 + a_6 + a_7 = 0$
5	$-a_5 + a_{11} + a_{12} = 0$
6	$-a_6 + a_{10} = 0$
7	$-a_7 + a_{11} = 0$
8	$-a_8 - a_9 - a_{10} + a_{13} = 0$

Ou em forma matricial:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Em nossos cálculos vamos considerar um valor epsilon de offset de $e = 10^{-15}$

As medidas efetuadas são organizadas no vetor m:

$$m = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ (101 & 11 & 19 & 32 & 41 & 14 & 15 & 10 & 21 & 16 & 15 & 54 & 48) \end{bmatrix}$$

As tolerâncias de cada instrumento são organizadas no vetor t:

$$t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ (0.01 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.01 & 0.01) \end{bmatrix}$$

Tolerâncias absolutas: a

$$\rightarrow \\ a := m \cdot t$$

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ (1.01 & 0.55 & 0.95 & 1.6 & 2.05 & 0.7 & 0.75 & 0.5 & 1.05 & 0.8 & 0.75 & 0.54 & 0.48) \end{bmatrix}$$

Formulação do método
Tolerância mais erro: v $v := a + e$
Diagonalizando o vetor de tolerâncias absolutas [tolerância por medida]: T $T := \text{diag}(v^T)$
Matriz BT: Aplica as tolerância absolutas à equação de balanço de cada nodo (linha de B) $BT := B \cdot T$
Vetor de imbalance em cada nodo: i Traduz o erro ao aplicar as medidas diretamente em cada nodo $i := B \cdot m^T$
Vetor de balanço: b $b := i \cdot 0$
Vetor de erro: e Vetor de imbalances em cada nodo

$$e := i - b$$

Resultados em unidades de tolerância

MeasTol

Exprime cada medida em unidades de tolerância (UT): quantas UT vale cada medida.

$$\text{MeasTol} := m / v$$

CorTol: Correção para cada medida em unidades de tolerância.

$$\text{CorTol} := [\text{BT}^T \cdot (\text{BT} \cdot \text{BT}^T)^{-1} \cdot e]^T$$

BT.BT^T

Para cada nodo calcula o somatório dos produtos das tolerâncias cruzadas deste nodo com as demais. A diagonal contém o somatório dos quadrados das tolerâncias.

$$\text{BT}^T \cdot (\text{BT} \cdot \text{BT}^T)^{-1}$$

Calcula a tolerância relativa, tolerância do nodo dividida pela tolerância total

$$\text{BT}^T \cdot (\text{BT} \cdot \text{BT}^T)^{-1} \cdot e$$

Representa a o erro em cada nodo, ponderado pelos pesos calculados no passo anterior

RecTol: Dados Reconciliados em unidades de tolerância:

$$\text{RecTol} := \text{MeasTol} - \text{Cor Tol}$$

Resultados em unidades de massa

Correções:

$$\text{Correções} = [T \cdot [\text{BT}^T \cdot (\text{BT} \cdot \text{BT}^T)^{-1} \cdot e]]^T$$

Dados reconciliados: R

$$R := m - \text{Correções}$$

Cálculos:

$$\text{MeasTol} =$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
100	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	100	100

$$\text{CorTol} =$$

1	2	3	4	5	6	7
-0.41	0.442	-2.11	0.846	0.973	-2.331	-0.02

RecTol =

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
100.41	19.558	22.11	19.154	19.027	22.331	20.02	21.514	20.005	19.54

Dados Reconciliados (R):

1	2	3	4	5	6	7
101.41383	10.75716	21.00486	30.64682	39.00498	15.63168	15.01515

Correções (R):

1	2	3	4	5	6	7
-0.414	0.243	-2.005	1.353	1.995	-1.632	-0.015

As demais medidas são obtidas por diferença a partir das 7 medidas que determinam o sistema.

Este programa em Matlab fica:

```
% Sigmafine.m
%
% Balance Matrix
% 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
B=[-1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 -1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0;
    0 0 -1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0;
    0 0 0 -1 0 1 1 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 -1 1 0;
    0 0 0 0 0 -1 0 0 0 1 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 1 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 -1 -1 -1 0 0 1]

% Medidas
m=[101 11 19 32 41 14 15 10 21 16 15 54 48]

% Tolerancias
t=[.01 .05 .05 .05 .05 .05 .05 .05 .05 .05 .01 .01]

% epsilon: offset from 0
e= 10^(-15)

% Tolerancias absolutas: multiplica membro a membro
a=m.*t

% Vetor: tolerancia + erro
v= a +e
```

```

% Traço da matriz: T
T= diag(v')

% Matriz BT
BT = B*T

% Vetor de Imbalanço por nodo: i
i= B*m'

% Vetor de balanço: b
b= i*0

% Vetor de erro
error= i-b

% Resultado em unidades de tolerância
MeasTol=m./v

CorTol= (BT'*inv(BT*BT')*error)'

%
RecTol= MeasTol - CorTol

% Resultados em unidades de massa
% Correcoes aplicadas
T5= T*CorTol'
Corrections = (T*(BT'*inv(BT*BT')*error))'

% Dados reconciliados
Reconciliados = m-Corrections

```

Análise de qualidade de dado

Definições preliminares:

Fluxo não checado - Um fluxo de massa é denominado não checado se não pode ser confirmado por pelo menos duas medidas independentes.



Os fluxos A, B e C são medidos diretamente ou podem ser calculados pelos outros dois fluxos.
Fluxos não checados = 0.

Os fluxos A e B são medidos diretamente e C é calculado pela soma de A e B.
Fluxos não checados = 3.

Figura 8: Fluxos checados e não checados

Imbalanço

Soma das medidas dos fluxos que chegam a um ponto de balanço (nodo) + acumulações no ponto – soma das medidas dos fluxos que saem do ponto.

É importante estabelecer um KPI que nos permita especificar, verificar e comparar quantitativamente a qualidade de um dado.

Existem vários produtos para cálculo do balanço de massa no mercado.

Um destes produtos, citado na referência [Soudek], define quatro índices para a medição da qualidade de um dado:

DX0

Percentual de massa não checado fluindo através da planta.

Objetivo: 10 a 25%

DX1

Percentual geral de imbalanço nas medidas sujeitas a checagem cruzada.

Objetivo: 6 a 15%

DX2

O percentual geral de correção aplicado às medidas individuais sujeitas à checagem cruzada, através do algoritmo de balanço de massa.

Corresponde ao somatório do quadrado das correções aplicadas pelo algoritmo de balanço de massa às medidas individuais.

Objetivo: 2 a 5%

DX3

Percentual geral de tolerâncias para cada medida dentro do balanço.

DX3 corresponde ao valor esperado de tolerância dos instrumentos para as medidas efetuadas no dia. Este valor tende a ser atualizado com base nas correções efetuadas durante o balanço. Depois de um certo tempo é de se esperar que $DX2/DX3 = 1$.

Objetivo: 2 a 5%.

A plotagem dos índices DX1 a DX4 são a base de um programa de análise da qualidade dos dados a ser desenvolvido pelas empresas.

Além da plotagem destas curvas, um sistema de análise de dados também recorre aos seguintes gráficos:

Análise de balanço dos nodos

Os imbalanços de cada nodo são plotados diariamente. Estes imbalanços devem flutuar em torno de 0. Imbalanços constantemente positivos ou negativos indicam um erro sistemático, como por exemplo um vazamento no dispositivo. Deve-se isolar o gráfico de imbalanço do nodo com problema e checar o funcionamento de cada instrumento.

Para prosseguir a análise, plota-se as correções de cada instrumento que executa medições referentes ao nodo. Medidores que apresentam correções sistematicamente positivas são suspeitos.

Uma forma de constatar sua influência negativa é tirar o instrumento de linha e verificar sua influência o imbalanço. Se o imbalanço melhorar, o instrumento deve ser checado.

Análise pontual de uma medida

Plota-se o valor de leitura dos instrumento vs o valor corrigido (reconciliado).

É levantada a curva para o instrumento:

Reconciliado = fator * medido + bias

Se os erros de medição forem aleatórios (ruído gaussiano) então fator = 1 e bias=0.

Um bias sistemático pode ser compensado na medição, eliminando o problema até a recalibração do instrumento. Erros lineares (fator $\neq 1$) também podem ser compensados.

Análise de medidores em serviço

Plota para cada grupo de processos quais os medidores em operação para cada dia do mês.

Exemplo de análise de qualidade de dados:

Este exemplo foi retirado da referência 1:

A situação que refere-se a um trabalho de reconciliação e análise de dados em uma refinaria americana. A análise de qualidade de dados foi baseada em dados colhidos de 1~31 de março de 1997.

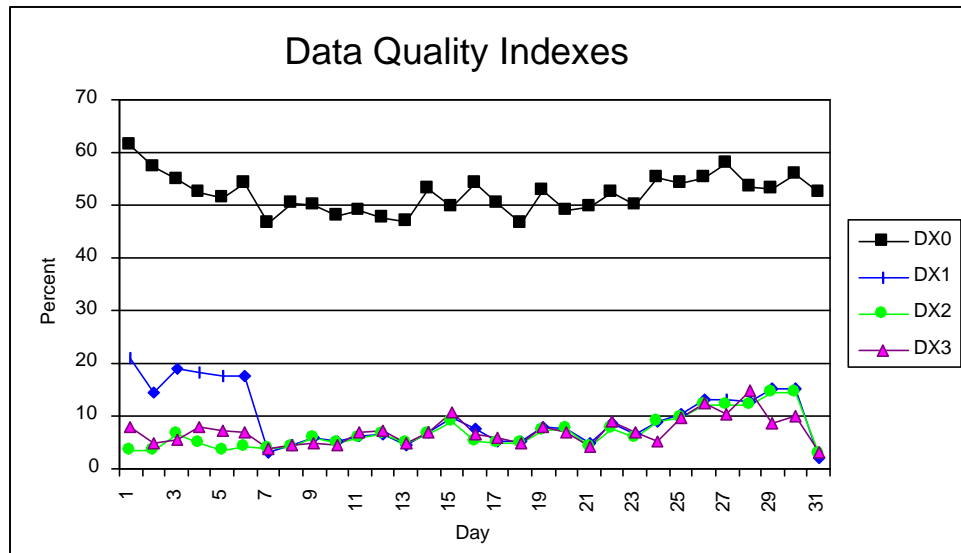


Figura 9: Índices de qualidade de dados.

Análise:

DX0:

Apresenta flutuações de 47 a 61% durante o mês. O nível é alto indicando que as medidas não estão proporcionando suficientes informações de checagem cruzada. Recomendação: abaixar o índice para abaixo de 20%.

DX1:

Resultado muito bom, mas parte disso deve-se dar pelo alto valor de DX1. A falta de checagem cruzada facilita o fechamento do balanço. Durante a maior parte do mês o imbalanço ficou por volta de 5%. Na primeira e na última semana do mês o imbalanço ficou muito alto e medidas corretivas foram tomadas para corrigi-lo.

DX2/DX3:

O valor de DX2 é consistente com DX1 e é muito bom. Analisando as correções aplicadas a cada instrumento pode-se proporcionar uma melhor compreensão para estabelecer melhores tolerâncias para os instrumentos o que aumentará a confiabilidade do balanço. O fato de DX3 acompanhar DX2 indica que um bom trabalho foi feito em corrigir os valores de tolerâncias dos instrumentos diariamente.

Análise de balanço dos nodos

Vamos estudar estatisticamente os detalhes dos balanços diários de cada nodo da refinaria durante um mês. Os imbalanços deveriam flutuar ao redor de zero de um dia para outro. As 7 piores unidades de processo e as 7 piores acumuladores (tanques, cavernas, *pipelines*, etc.) são apresentados nas figuras 10 e 11.

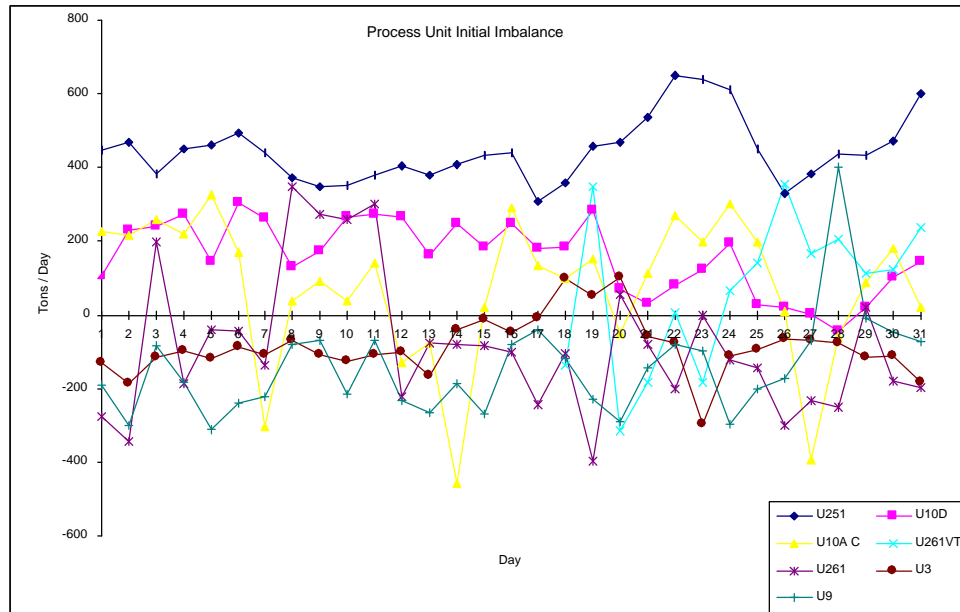


Figura 10: Sete piores resultados: unidades de processo

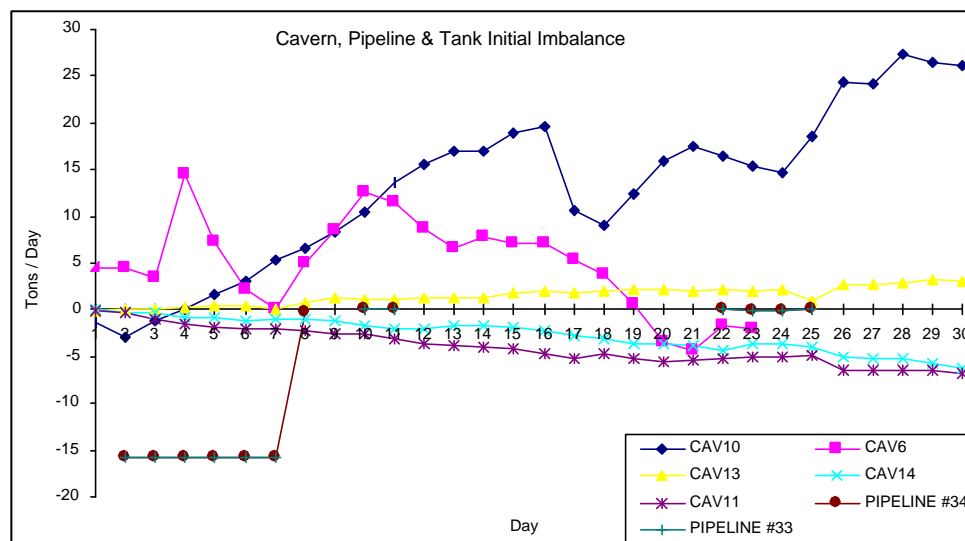


Figura 11: Sete piores resultados: acumuladores

Um dos tanques (CAV10) apresenta um imbalanço crescente. Foi descoberto que o tanque apresentava vazamento. Os imbalanços das unidades de processo entretanto eram muito maiores e o foco recaiu sobre elas.

Dois unidades de processo apresentam um grande imbalanço: unidade U251 e U10D e devem ser examinadas com mais detalhes.

A unidade U251 apresenta uma perda de massa média de 2.9% e a unidade U10D uma perda de massa de 2.2%. Estes valores são altos e apresentam uma polarização. Isto recomenda uma análise detalhada destes processos. Vamos iniciar com a análise do processo U251.

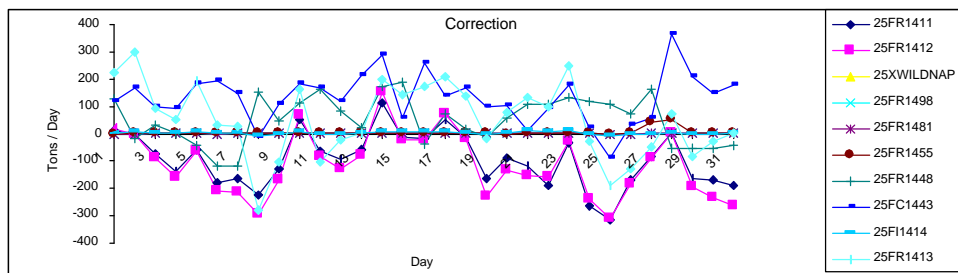


Figura 12: Correções dos medidores em torno da unidade U251

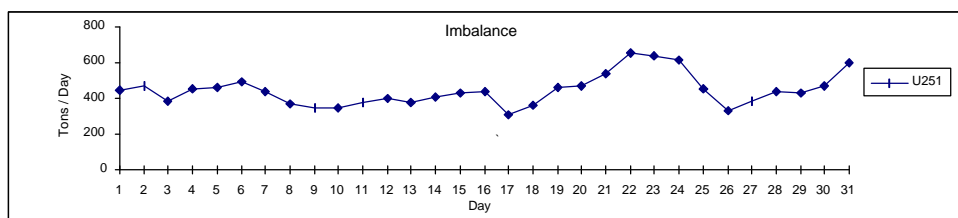


Figura 13: Imbalanço da unidade U251

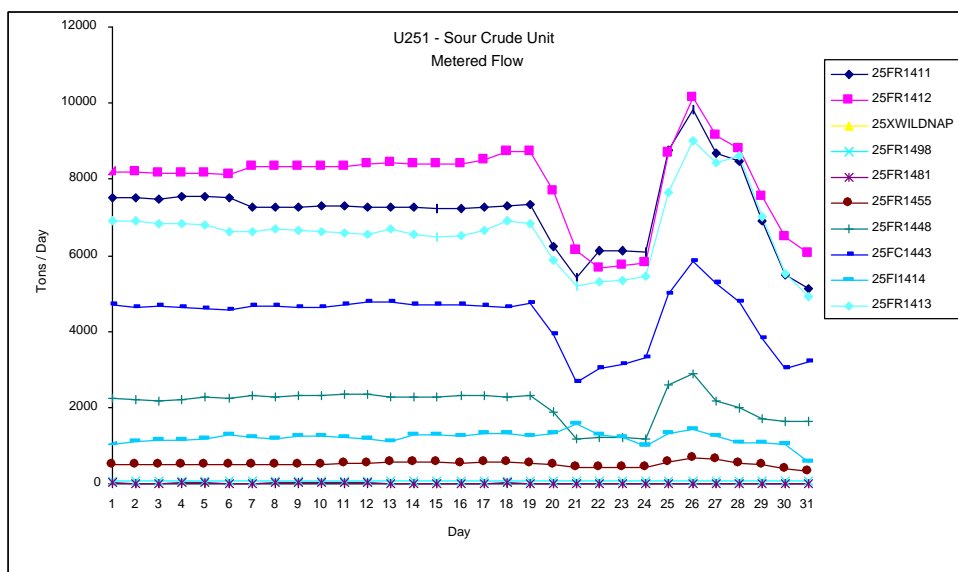


Figura 14: Fluxos medidos em torno da unidade U251

Pela figura 14 notamos que ocorre uma grande depressão na planta após o dia 18. Este distúrbio influencia muito pouco o imbalanço. Um dos medidores, 25FC1443, apresentou quase sempre uma correção positiva. Este instrumento foi selecionado para uma investigação mais apurada.

Vamos agora proceder à análise do processo U10D.

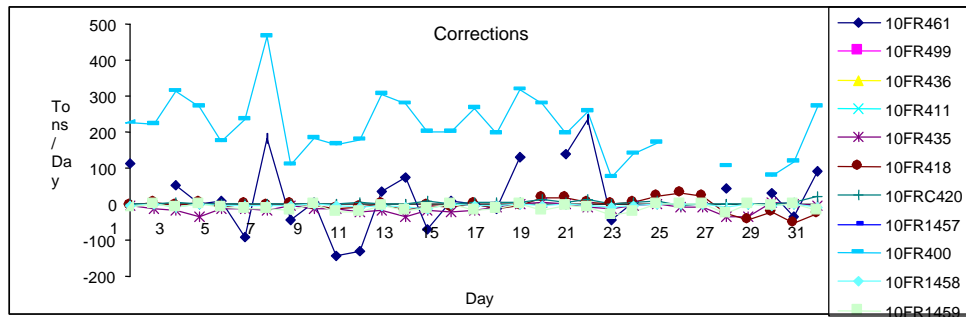


Figura 15: Correções em torno da unidade U10D

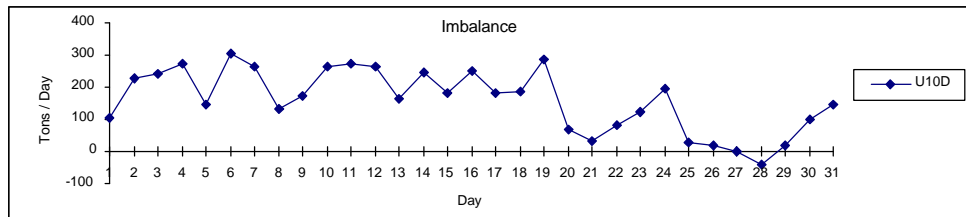


Figura 16: Imbalanços em torno da unidade U10D

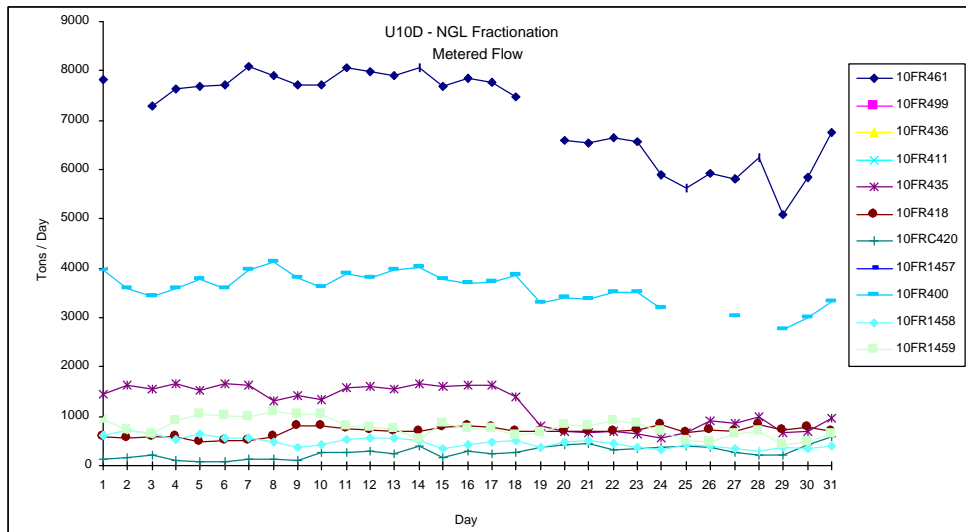


Figura 17: Fluxos medidos em torno da unidade U10D

Analisando as figuras 15, 16 e 17 percebemos que quando o instrumento 10FR400 está fora de linha, em duas oportunidades, por volta do final do mês, o imbalanço caiu significativamente. Este medidor foi selecionado para análise futura. Já quando o instrumento 10FR461 esteve fora de linha, o impacto no imbalanço foi muito pequeno.

Análise de ponto de medição

Os dois medidores selecionados 25FC1443 e 10FR400 serão analisados em detalhe. Inicialmente seleciona-se as curvas de resultado reconciliado vs. Medido durante o período de um mês. Vamos calcular os coeficientes da curva de correlação: $y=ax + b$. Denominamos a de factor e b de bias. Como já foi visto, se o erro for causado por ruído gaussiano então factor= 1 e bias=0.

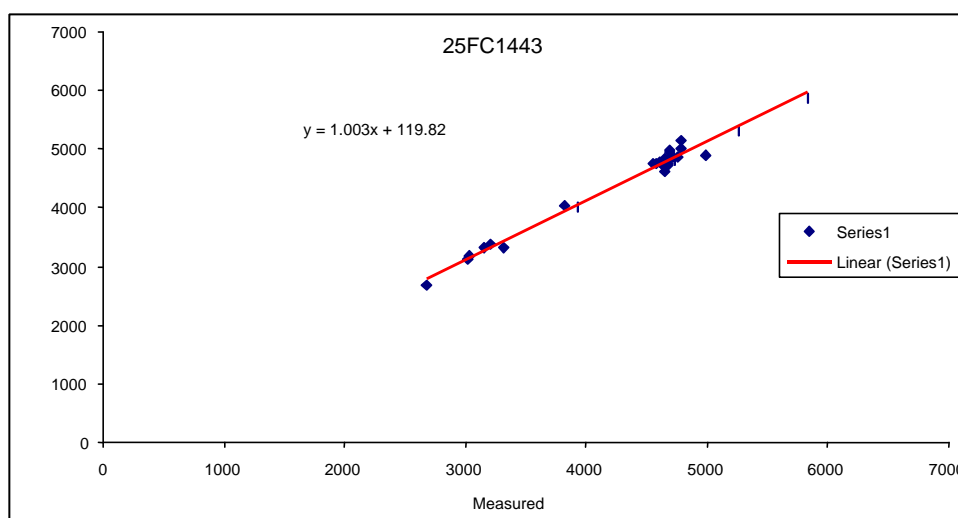


Figura 18: Curva de correlação reconciliado x medido para medidor 25FC1443.

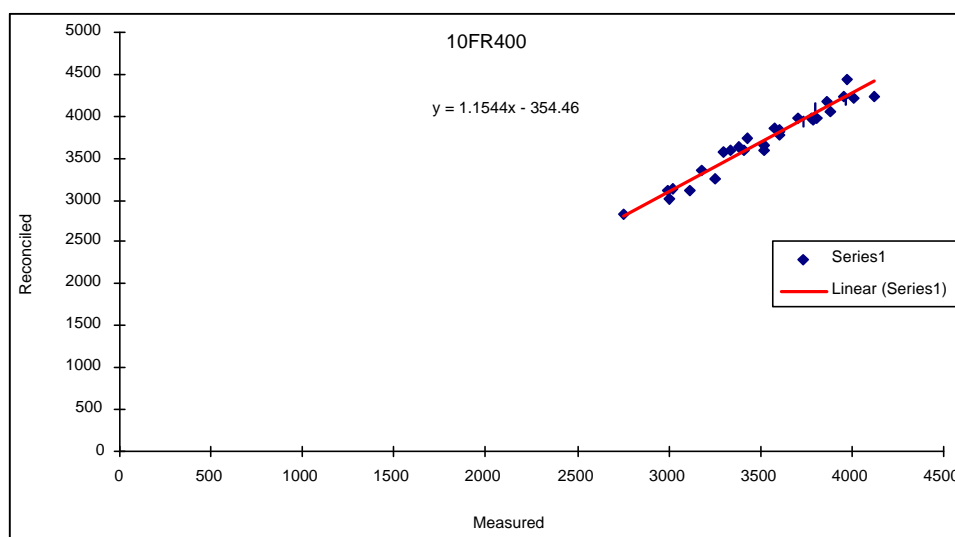


Figura 19: Curva de correlação reconciliado x medido para medidor 10FR400.

Para 25FC1443, fator = 1.003 e bias = 120 tons.

Para 10FR400, fator = 1.15 e bias = 335 tons.

Os resultados de leitura destes instrumentos puderam ser corrigidos matematicamente, enquanto aguardavam por uma manutenção. Este programa

serve para estabelecer prioridades na substituição, manutenção e calibração de instrumentos.

Análise de medidores em serviço:

É produzida a tabela de medidores em serviço. A tabela ressalta as áreas da planta onde a instrumentação é insuficiente causando o aumento em DX0. Os dados são agrupados por unidades de processo.

Áreas de processo

Unit	10	11	12	14	15	17	18	19	20	21	22	24	25	26	27	28	30	33	3	4	59	5	62	68	6	7	8	90	9	Misc	Total
Total	33	14	5	13	9	0	4	7	9	5	12	14	23	34	3	2	6	19	12	8	2	3	16	13	11	10	3	1	11	21	323
Day																															
31	22			11	9		4	6	2	1	7	11	21	27		2		14	11	8		2	5		6		3	1	10	7	190
30	3							1	5		2	2		1				1													15
29	4								2	2							6					1									16
28	1										1										1			1							4
27													1												2						3
26			1										1												5					1	8
25			2																												2
24	1													1																	2
23				1																											1
22																															0
21		3																													3
20		7																													9
19		3			1																										8
18																					1										2
17																															2
16																															1
15																										1					6
14														1					1												5
13																															0
12																															0
11																		1													2
10																															0
9															1																2
8	1																														2
7					1																										5
6																															2
5										2																					6
4	1		1																												6
3																															2
2																															8
1		1										1			1																7

Tabela 1: Medidores em serviço

A primeira linha indica o número total de medidores em uma área de processo. As demais linhas indicam o número real de medidores em serviço pelo número de dias indicado. A área 11 dispõe de 14 medidores. Destes 3 estiveram em funcionamento por 21 dias, 7 por 20 dias, 3 por 19 dias e 1 por apenas um dia. A partir deste quadro determinamos em que áreas deve-se dar prioridade para aquisição de instrumentos.

O relatório retrata uma economia de US\$ 3 milhões por ano com a implantação do sistema.

EXERCÍCIOS

1. Atribua o valor verdade as sentenças abaixo:
 - () As medidas não checadas estão sempre em balanço.
 - () As medidas checadas estão quase sempre em imbalance.
 - () Para obtenção de um balanço de massas, de forma a detectar erros de medida de instrumentos, deve haver redundância de leitura dos instrumentos.
 - () Dada uma função de duas variáveis, x e y , o ponto em que as derivadas parciais da função em relação a x e a y se anulam, é sempre um ponto de máximo ou de mínimo.
 - () Num sistema de medição em equilíbrio estatístico os imbalances em cada nodo devem flutuar ao redor de 0.
 - () Se plotamos o gráfico de correções de cada instrumento em um nodo com problemas e um instrumento sempre apresenta correções positivas, devemos selecioná-lo para maiores análises.
 - () Se ao colocar o instrumento fora de operação, o imbalance diminuir, o instrumento deve ser colocado como suspeito.
 - () Plotando um gráfico dos valores medidos vs reconciliados de um instrumento, tido como suspeito, podemos descobrir se existe algum *bias* na medida. Este *bias* pode ser compensado pelo sistema de medição até que o instrumento seja recalibrado.

2. Demonstre que:

A média da soma de duas distribuições gaussianas é a soma das médias.
O desvio padrão da soma de duas distribuições gaussianas é a raiz quadrada da soma dos quadrados dos desvios padrões das distribuições combinadas.

3. Uma caixa de papelão sem tampa deve ter um volume de 12000 cm^3 . Ache as dimensões da caixa que minimizem a quantidade de papelão utilizada.
 - 3.1. Determine o valor de uma variável como função do volume e substitua na expressão da área para obter uma equação de duas variáveis. Agora calcule o mínimo desta equação.
 - 3.2. Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange.

4. Ache as dimensões c , l , h de uma caixa em forma de paralelepípedo a fim de obter o volume máximo. A área da caixa deve ser igual a 8.

5. Determinar o máximo da função $z = xy$, considerando que x e y são positivos e que ainda satisfazem a condição:
$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

6. Aplique o programa do Sigmafine à situação dos exemplos 1 e 2 (balanço com 1 nodo) e comente os resultados.

7. Exemplo de um processo mineral real.

A figura 20 mostra um fluxograma típico de um processo mineral. Admita que você tenha instrumentos em todos os fluxos menos em f10.

Os valores medidos para o circuito são:

$m = (8592 \ 1433 \ 7158 \ 3974 \ 2540 \ 1458 \ -19 \ 1221 \ 2498 \ 4834 \ 1213 \ 2678 \ 1103 \ 2948 \ 801 \ 662)$

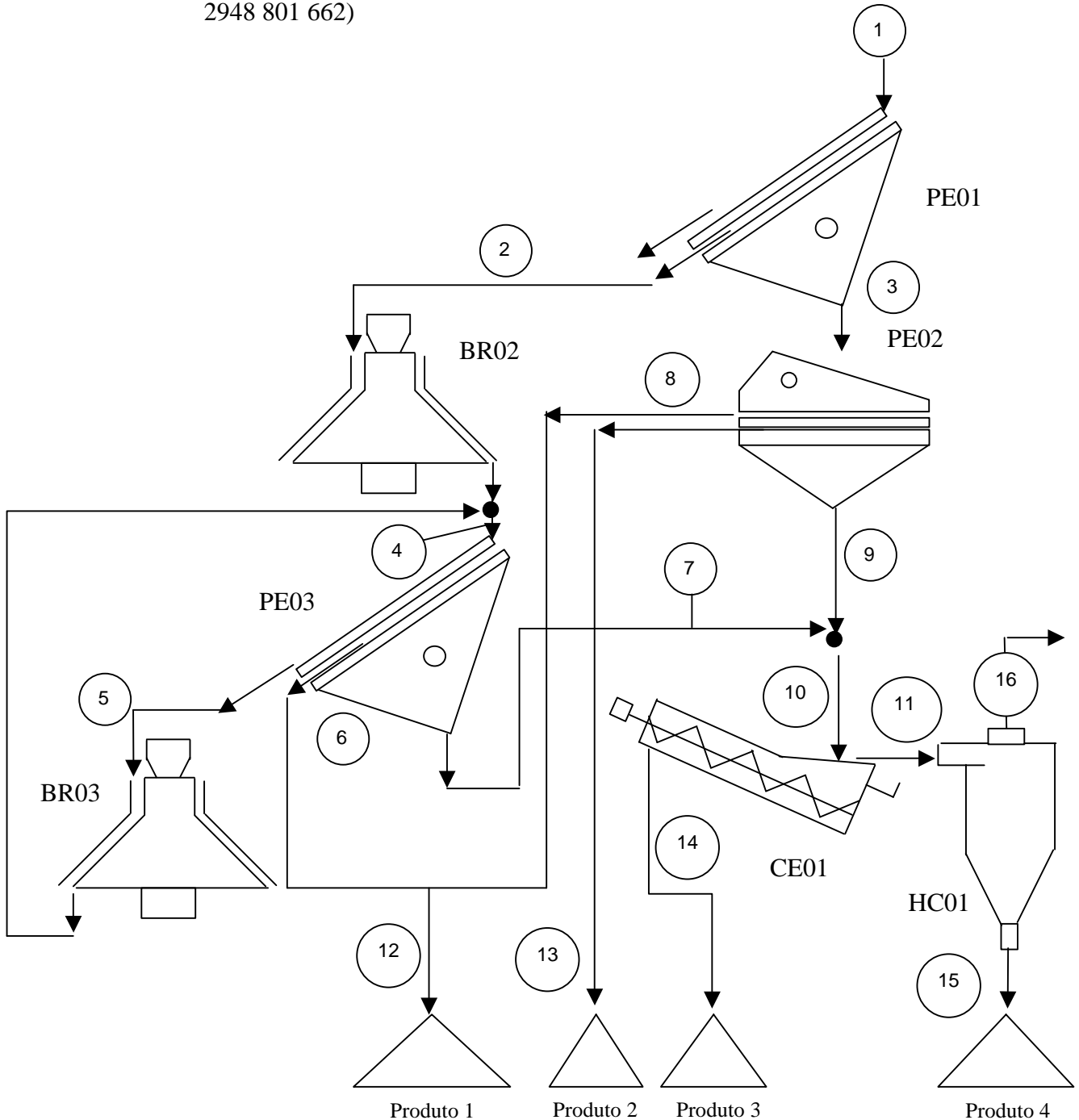


Figura 20: Um fluxograma típico de processo

a) Desenhe o grafo da topologia deste processo.

b) Calcule o índice X1 para este processo.

c) Admitindo que o vetor de tolerância t é:

$$t = (0.01 \ 0.05 \ 0.10 \ 0.05 \ 0.05 \ 0.10 \ 0.02 \ 0.05 \ 0.06 \ 0.04 \ 0.05 \ 0.05 \ 0.05 \\ 0.06 \ 0.03 \ 0.06)$$

Calcule as medidas reconciliadas, o vetor de correções e o valor do índice X2 e X3.

Desenvolva todas as expressões matricialmente e utilize o Matlab para automatizar os cálculos.

Bibliografia

- 1) Data reconciliation and data quality, Ales Soudek, OSI Software, Inc.
- 2) Máximos e mínimos de funções de diversas variáveis, Máximos e mínimos condicionados – método dos multiplicadores de Lagrange, Aplicação dos *multiplicadores de Lagrange aos balanços metalúrgicos.; Antônio Carlos Girodo, Marco Aurélio Soares Martins, 1997
- 3) Balanço de massas e metalúrgico; Marco Aurélio Soares Martins, Ernandes Sávio de Souza, Maio 1998.
- 4) Operation Information Systems, Pierre Grosdidier, P.E., Aspen Technology, Inc., June 1998.
- 5) História da matemática, Carl B. Boyer, Edgard Blücher, 1974