SINTONIA DE CONTROLADORES P.I.D.

João Lourenço

Realizado em Janeiro de 96 e revisto em Janeiro de 97

O presente texto pretende, inicialmente, dar a conhecer quais as características principais das várias acções de controlo, constitutivas, de um P.I.D., de seguida apresentar e exemplificar alguns métodos práticos de sintonia e por fim é apresentado um método analítico de sintonia baseado no Root-locus.

Nos métodos práticos de sintonia o primeiro passo na utilização dos controladores standard[1] P, PI, PD, PID tem como principal decisão a escolha dos modos a utilizar (proporcional, derivativo, integral, ou uma combinação destes). Uma vez aquela tomada, procede-se ao ajustamento dos vários parâmetros do controlador. O ajustamento ou calibração do controlador (sintonização de controladores) consiste em deduzir, partindo da resposta do sistema, quando este é sujeito a entradas específicas, determinados valores que vão permitir o cálculo dos referidos parâmetros.

A vantagem deste procedimento é não existir necessidade de conhecer o modelo do sistema (por vezes muito difícil de determinar). Pode-se assim concluir que se deverá recorrer a este procedimento somente quando o custo de calibração do controlador for inferior ao custo associado à análise do sistema e projecto do controlador adequado.

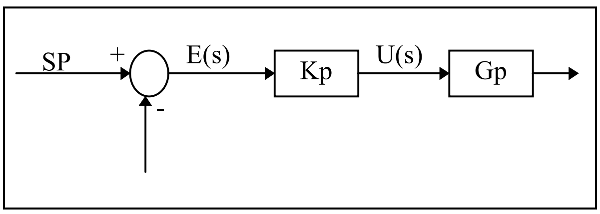
O método analítico, consiste em sintonizar os modos PID para uma aplicação específica de modo a que determinados critérios de "performance" sejam verificados. Este é usado sempre que a função de transferência do sistema é conhecida [2].

Finalmente, é importante realçar que não é obrigatório que se utilize apenas um destes métodos, na medida em que, na maior parte das vezes, os projectos resultam da sua combinação.

Antes de proceder à apresentação propriamente dita dos dois procedimentos referidos anteriormente, será conveniente analisar algumas das acções básicas de controlo utilizadas na industria e a sua contribuição para a resposta de um sistema.

1 - Acção Proporcional

Neste tipo de controlador a relação entre a sua saída e o sinal de erro, e(t), é dada por:



[1] O controlador PI é o mais corrente e o PD é muito raro por razões que se vão tornar óbvias ao longo do texto.

[2] Funções de transferência de muitos sistemas electromecânicos são fáceis de obter.

$$u(t) = K_p\ e(t) \xrightarrow{L} U(s) = K_p\ E(s) \qquad (1\text{-}1)$$

em que K_p é designado por ganho proporcional.

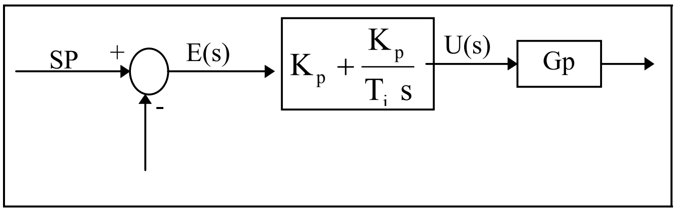
Um controlador proporcional consiste essencialmente num amplificador com ganho ajustável.

Uma característica importante desta acção de controlo, é a existência de um erro residual permanente sempre que ocorre uma alteração de carga[3], e o sistema que se pretende controlar seja do tipo 0. O erro estacionário que é dependente de K_p e da carga, pode ser minimizado por um aumento de K_p. No entanto deve-se notar que o aumento deste parâmetro conduz a um aumento do tempo de estabelecimento e eventualmente até à instabilidade.

Conclui-se assim que este tipo de controlador só pode ser usado, quando o ganho proporcional é suficientemente elevado para reduzir o erro estacionário a um nível aceitável, ou quando não são previsíveis alterações frequentes da carga.

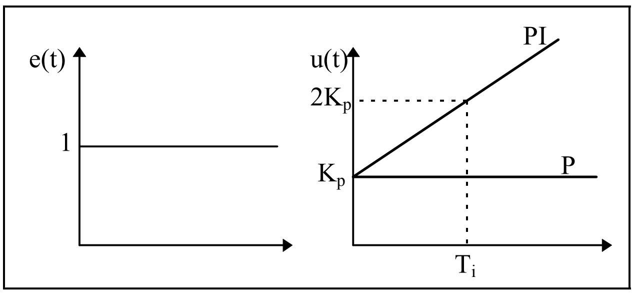
2 - Acção Proporcional - Integral

Se considerarmos que a saída do controlador é agora função do erro e do integral do erro, estamos perante um controlador proporcional - integral :



$$u(t) = K_p(e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)\,d\tau \xrightarrow{L} U(s) = K_p(1 + \frac{1}{T_i\ s})E(s) \qquad (1\text{-}2)$$

em que T_i (tempo integral), o tempo necessário para que a contribuição da acção integral iguale a da acção proporcional, é expresso em segundos ou minutos.



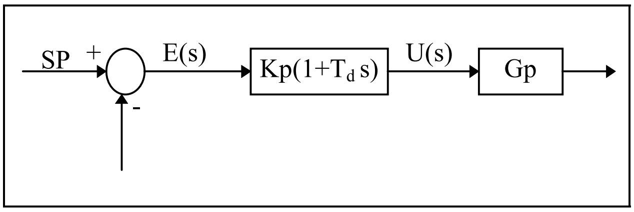
[3] Alteração de Carga deve ser interpretado neste texto como uma modificação dos parâmetros do sistema a controlar, isto é, do comportamento dinâmico do sistema.

A componente integral, ao adicionar um polo na origem da função de transferência do controlador, elimina o erro estacionário de posição, independentemente do sistema que se pretende controlar. Se, por um lado, como já referido anteriormente, a acção integral elimina o erro estacionário, por outro, aumenta o tempo de estabelecimento e piora a estabilidade relativa, o que usualmente é indesejável.

Como consequência, o ganho da acção proporcional deve ser reduzido, sempre que esta esteja combinada com a acção integral.
O PI é utilizado em sistemas com frequentes alterações de carga, sempre que o controlador P, por si só, não seja capaz de reduzir o erro estacionário a um nível aceitável. Contudo o sistema deve ter alterações de carga relativamente lentas, para evitar oscilações induzidas pela acção integral.

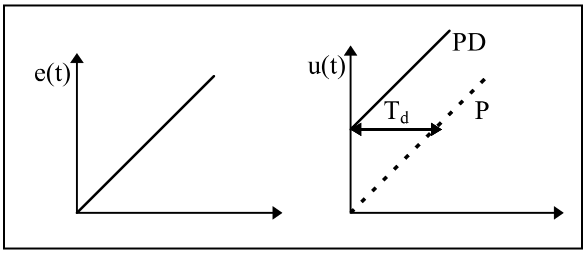
3 - Acção Proporcional - Derivativa

Neste controlador o sinal de controlo (u(t)) é proporcional ao erro e à sua taxa de variação:



$$u(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \xrightarrow{L} U(s) = K_p (1 + T_d\, s) \qquad (1\text{-}3)$$

em que T_d (tempo derivativo), o período de tempo antecipado pela acção derivativa relativamente à acção proporcional, é expresso em segundos ou minutos.

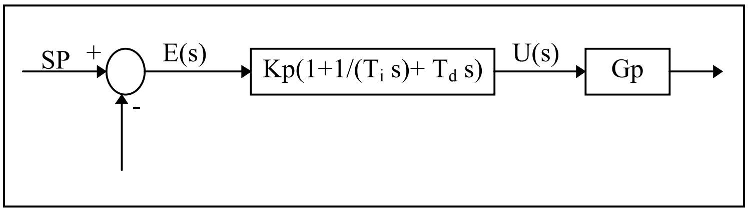


O facto de o sinal de controlo ser proporcional à taxa de variação do erro, implica que o modo derivativo nunca possa ser usado sozinho, uma vez que só responde a regimes transientes.

A adição do modo derivativo ao modo proporcional resulta num controlador altamente sensível, uma vez que aquele primeiro, ao responder a uma taxa de variação do erro, permite correcções antes deste ser elevado. Não obstante o modo derivativo não afecte directamente o erro estacionário, adiciona amortecimento ao sistema (melhora a estabilidade) e assim permite o uso de valores de K_p mais elevados, o que implica um menor erro estacionário. Um inconveniente deste modo é o de acentuar o ruído de alta frequência.

4 - Acção Proporcional - Integral - Derivativa

Este modo resulta da combinação dos modos proporcional, integral e derivativo. Pode-se afirmar que resulta num compromisso entre as vantagens e desvantagens de um PI e as vantagens de um PD. A saída do controlador é dada por :



$$u(t) = K_p(e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)\,d\tau + T_d\frac{de(t)}{dt} \xrightarrow{L} U(s) = K_p(1 + \frac{1}{T_i S} + T_d\,s)E(s) \quad (1\text{-}4)$$

Neste tipo de controlador, o modo integral é usado para eliminar o erro estacionário causado por grandes variações de carga. O modo derivativo, com o seu efeito estabilizador, permite um aumento do ganho e reduz a tendência para as oscilações, o que conduz a uma velocidade de resposta superior quando comparado com P e PI.

No entanto, estas propriedades assumem um carácter geral, pelo que podem existir excepções em determinados sistemas.

Geralmente, para uma função de transferência em cadeia aberta com a seguinte forma:

$$\frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

um K_p elevado tem o efeito de reduzir o tempo de subida e o erro estacionário (sem nunca o eliminar). O controlo integral terá como efeitos, por um lado, eliminar o erro estacionário e por outro piorar a resposta transitória, isto é, torná-la mais oscilatória. Sempre que se utilize controlo integral, deve-se sempre testar inicialmente com um K_p reduzido. A utilização do controlo derivativo tem como principal consequência uma melhoria da estabilidade do sistema, reduzindo a sobreelevação e melhorando a resposta transitória.

Os efeitos na resposta, do sistema em cadeia fechada, de adicionar os modos proporcional, integral e derivativo são listados na próxima tabela.

Resposta CF	Tempo de Subida	Sobreelevação	Tempo de Estabelecimento	Erro Estacionário
Proporcional	Diminuição	Aumento	Sem alteração	Diminuição
Integral	Diminuição	Aumento	Aumento	Elimina
Derivativo	Sem alteração	Diminuição	Diminuição	Sem alteração

Note que estas correlações não são exactas, uma vez que, se alterarmos um dos parâmetros do controlador podemos estar a alterar o efeito das outras acções. Por esta razão, a tabela só deve ser usada como referência quando se está a determinar os parâmetros do controlador.

Quanto à decisão do tipo de controlador a usar numa determinada aplicação, não é possível obter uma resposta definitiva. Idealmente, o controlador mais simples que satisfaça a “resposta desejada “ é o que deve ser escolhido, infelizmente esta é uma escolha que geralmente só se pode fazer quando a aplicação é simples ou quando existe alguma informação relativa a aplicações semelhantes.

A selecção do controlador deve depender das condições operativas do sistema e de especificações de performance tais como, o erro estacionário máximo, a sobreelevação máxima e tempo de estabelecimento permitido. Se o erro estacionário não é tolerado, então o modo integral deve ser incluído no controlador, uma vez que esta é a única acção que o permite eliminar ou reduzir. A necessidade da acção derivativa pode ser ditada por uma sobreelevação máxima e/ou tempo de estabelecimento. Se um reduzido erro estacionário não é critico para as condições operativas do sistema, então é possível omitir o modo integral, e o uso do modo derivativo depende entre outros factores da necessidade ou não de adicionar ganho suplementar ao modo proporcional.

Como regra geral, pode-se afirmar que se adiciona o modo proporcional para obter um determinado tempo de subida, que se adiciona o modo derivativo para obter uma determinada sobreelevação e que o modo integral só deve ser introduzido para eliminar o erro estacionário.

A questão que se coloca agora, é como seleccionar os parâmetros dos controladores de modo a podermos obter uma resposta “satisfatória”, quando se controla um determinado sistema, perante um quase completo desconhecimento da sua dinâmica(1º Procedimento).

Assim, torna-se necessário recorrer a métodos empíricos para resolver este problema. Seguidamente serão expostos dois métodos inicialmente propostos por Ziegler e Nichols e que resultam de testes experimentais realizados em vários sistemas.

Métodos Práticos de Sintonia de Controladores P.I.D.

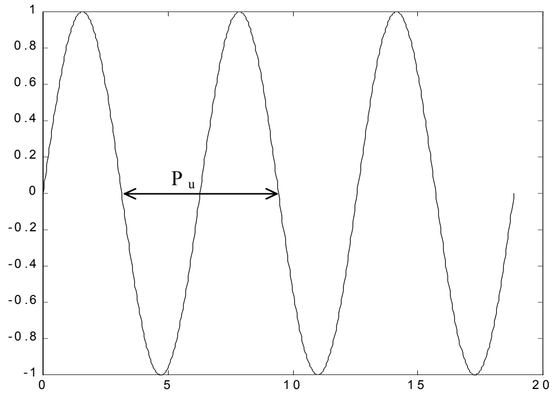
Método da Sensibilidade Limite

Este método, baseado no ajuste de uma malha fechada até se obterem oscilações com amplitude constante, utiliza um conjunto de fórmulas para determinar os parâmetros do controlador, as quais requerem duas medidas do sistema: o Ganho critico (G_u :o ganho mínimo que torna o processo criticamente estável), e o período de oscilação correspondente, P_u .

Procedimento para a Calibração dos Parâmetros do Controlador

1. Reduzir as acções integral e derivativa ao seu efeito mínimo;
2. Iniciar o processo com ganho reduzido;
3. Aumentar o ganho até que a variável controlada (saída do sistema) entre em oscilações com amplitude constante, enquanto se provocam pequenas

perturbações no sistema. Anotar o ganho, G_u, e o período de oscilação P_u (ver figura seguinte);



Com a obtenção destes valores, podemos calcular os parâmetros do controlador com base nas seguintes fórmulas:

Controlador	Fórmulas		
P	$K_p = 0.5\ G_u$		
PI	$K_p = 0.45\ G_u$	$T_i = P_u/1.2$	
PID	$K_p = 0.6\ G_u$	$T_i = P_u/2.0$	$T_d = P_u/8$

Após uma análise da tabela verifica-se que :

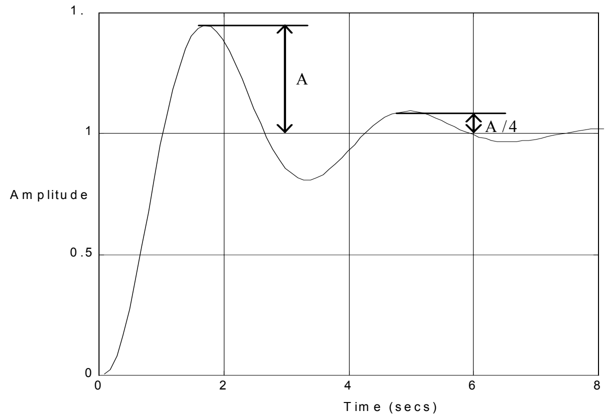
- O ganho proporcional é reduzido 10% quando o modo integral é introduzido, uma vez que este torna o sistema menos estável.
- Quando o modo derivativo é adicionado, verifica-se um aumento de P e uma redução de T_i devido ao efeito estabilizador do derivador.
- Os valores de 0.6 G_u e 0.125 P_u são muito conservadores quando não existe acção integral, uma vez que a ausência desta ultima torna o sistema mais estável, permitindo um aumento do ganho.

No entanto, este método de calibração apresenta as seguintes desvantagens :

1. As fórmulas acima descritas não garantem uma resposta óptima;
2. Nem todos os sistemas podem entrar em oscilação, ou não é desejável.

Foi assim desenvolvido um outro método, para fazer face ao primeiro problema referido, designado por Método da Sensibilidade Limite Modificado. Neste método o ganho é ajustado através de um procedimento tentativa-erro até que uma determinada "resposta desejada" seja atingida. A "resposta desejada" mais comum é o "Amortecimento do Quarto de Amplitude", em que o ganho é ajustado para que a amplitude de cada pico seja um quarto da do pico anterior (ver próxima figura).

O método modificado apenas necessita da medida do período último, P_u, que é utilizado para o cálculo de T_i e T_d. Uma vez estes parâmetros ajustados, o processo é perturbado com uma pequena alteração na entrada de referência (salto), sendo a saída observada e o ganho ajustado, sequência que será repetida até que a resposta verifique o critério do Amortecimento do Quarto de Amplitude. Este método é bastante fiável e pode ser aplicado em vários tipos de processos.



Partindo do período último, os ajustes dos parâmetros são feitos de acordo com a seguinte tabela :

Controlador	Fórmulas		
P	Ajustar o ganho até que o critério do quarto de amplitude seja verificado, quando o sistema é sujeito a uma alteração salto na sua entrada de referência.		
PI	Ajustar o ganho até que o critério do quarto de amplitude seja verificado, quando o sistema é sujeito a uma alteração salto na sua entrada de referência.	$T_i = P_u$	
PID	Ajustar o ganho até que o critério do quarto de amplitude seja verificado, quando o sistema é sujeito a uma alteração salto na sua entrada de referência.	$T_i = P_u /1.5$	$T_d = P_u/6$

Na prática, a existência de sobreelevação pode não ser tolerada, uma vez que a alteração da dinâmica do sistema pode conduzir o sistema à instabilidade.

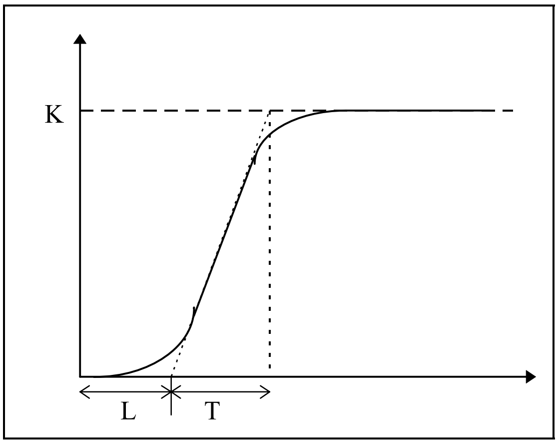
Método da Curva de Reacção

O procedimento normal no ajustamento dos parâmetros por este método, consiste na abertura da malha para que não haja realimentação e na obtenção da sua resposta a uma variação salto(amplitude M) na entrada de referência(SP). A resposta deverá ter uma forma em S (em situação contrária o método não é aplicável) como ilustrado na figura seguinte

A curva em S[4] pode ser caracterizada por duas constantes, o atraso L e a constante de tempo T, sendo estas determinadas se fizermos passar uma tangente pelo ponto de

[4] Este tipo de resposta é típico de grande parte dos processos industriais.

inflexão da curva. Nos pontos onde a tangente intercepta o eixo das abcissas e a linha horizontal com ordenada k, obtemos L e T, respectivamente.



Uma vez obtidos experimentalmente L, T e N[5] (declive máximo = K/T), podemos recorrer à tabela seguinte para determinar os valores dos parâmetros dos controladores.

Controlador	Fórmulas		
P	K_p =M/(NL)		
PI	K_p =0.9M/(NL)	T_i =3.33L	
PID	K_p =1.2M/(NL)	T_i = 2L	T_d = L/2

Como a resposta em S é característica de sistemas de 1ª ordem com atraso, isto é, com função de transferência :

$$\frac{C(S)}{U(S)} = \frac{K_c e^{-LS}}{TS+1} \tag{1-5}$$

Cohen e Coon recorreram a esta relação para determinar os valores teóricos dos parâmetros dos controladores. Estes dependem das constantes da função de transferência K_c, L e T , que podem ser medidas na curva de resposta. L é o tempo de atraso, K_c é o ganho estacionário, isto é, K_c=K/M, e T, que é a constante de tempo do sistema, é directamente proporcional ao valor final da resposta e inversamente proporcional a N, isto é, T = K_c/N.

Para verificar se a aproximação a um sistema de primeira ordem com atraso é válida, deve ser determinado o intervalo de tempo que medeia entre L e 0.632*K, o qual deve ser aproximadamente igual a T, com um erro máximo de 15%. Se a aproximação não se verificar, é porque a tangente ao ponto de inflexão não foi desenhada correctamente ou porque existem não-linearidades no sistema. Nesta ultima situação a aproximação não será válida.

O ajustamento dos parâmetros é feito com base na seguinte tabela em que R, razão de atraso, é definida como:

[5] É usual a existência de ruído no sinal de saída, o que torna difícil a obtenção de curvas "limpas" como as apresentadas nas figuras anteriores, o que implica que os parâmetros das curvas resultem de uma média dos valores obtidos em vários ensaios.

$$R = \frac{L}{T} = \frac{N L}{K} \qquad (1\text{-}6)$$

Controlador	Fórmulas		
P	$K_p = \frac{M}{N L}(1 + \frac{R}{3})$		
PI	$K_p = \frac{M}{N L}(\frac{10}{9} + \frac{R}{12})$		$T_i = L(\frac{30 + 3R}{9 + 20R})$
PD	$K_p = \frac{M}{N L}(\frac{5}{4} + \frac{R}{6})$	$T_d = L(\frac{6 - 2R}{22 + 3R})$	
PID	$K_p = \frac{M}{N L}(\frac{4}{3} + \frac{R}{4})$	$T_d = L(\frac{4}{11 + 2R})$	$T_i = L(\frac{32 + 6R}{13 + 8R})$

A principal vantagem deste método (Curva de Reacção), relativamente ao anterior deve-se ao facto de, uma vez determinada a curva de reacção do método, os parâmetros poderem ser ajustados imediatamente. Esta vantagem é particularmente útil em processos muito lentos, em que pode passar muito tempo até que o sistema atinja a estabilidade critica.

A sua principal desvantagem decorre de grande parte dos sistemas serem mais complexos do que um simples sistema de primeira ordem com atraso, o que significa que é ainda necessário um último ajuste no ganho antes de se poder considerar que a resposta do sistema é “aceitável”.

Existem diversas variações aos métodos acima expostos. Note-se como exemplo o facto de grande parte dos fabricantes fornecerem instruções relativas à sintonização dos seus controladores.

É importante realçar que não existem conclusões gerais relativas à exactidão ou aptidão destes métodos empíricos. A única inferência possível é que estes métodos conduzem a primeiras aproximações dos parâmetros dos controladores, que se podem considerar “razoáveis”, e que os valores obtidos podem necessitar de posteriores ajustamentos para fazer face à especificidade de cada sistema, até que “performances” óptimas sejam atingidas.
Na secção que se segue vai ser apresentado um dos vários métodos existentes para o cálculo dos parâmetros dos controladores P.I.D., assumindo que a função de transferência da cadeia aberta é conhecida(2º Procedimento).

Sintonia de Controladores P.I.D. com base no Root-Locus

Partindo da função de transferência dada por :

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{S} + K_d\, s) \;; \qquad (1\text{-}6)$$

em que, $K_i = K_p/T_i$ e $K_d = K_p\ K_d$, por comparação de (1-6) com (1-4), este método analítico para o cálculo dos parâmetros dos controladores P.I.D. tem por objectivo a escolha de K_p, K_i e Kd, de modo que para um dado s_1 se verifique a equação :

$$KG_c(s_1)G_p(s_1)H(s_1) = -1\,.$$

Dito de outra forma, estamos a projectar um controlador que coloca uma das raízes da equação característica[6] em $s = s_1$, sendo este, geralmente um valor complexo[7].

Se definirmos:

$$s_1 = |s_1|\, e^{j\beta} \qquad (1\text{-}7)$$

e

$$G_p(s_1)H(s_1) = |G(s_1)H(s_1)|\, e^{j\psi} \qquad (1\text{-}8)$$

os parâmetros do compensador são dados por:

$$\boxed{\begin{aligned} K_p &= \frac{-\text{sen}(\beta+\psi)}{|G_p(s_1)H(s_1)|\,\text{sen}\beta} - \frac{2K_i\cos\beta}{|s_1|} \\ K_d &= \frac{\text{sen}\psi}{|s_1|\,|G_p(s_1)H(s_1)|\,\text{sen}\beta} + \frac{K_i}{|s_1|^2} \end{aligned}} \qquad (1\text{-}9)$$

Demonstração :

Considerando que:

$$G(s_1)G_p(s_1)H(s_1) = \alpha\, e^{j\gamma} \qquad (1\text{-}10)$$

$$G_c(s_1) = \frac{\alpha\, e^{j\gamma}}{G_p(s_1)H(s_1)} = \frac{1}{M} e^{j\theta} \qquad (1\text{-}11)$$

em que : $M = \dfrac{|G_p(s_1)H(s_1)|}{\alpha}$ e $\theta = \gamma - \psi$ (1-12)

e igualando (1-6) com (1-11) em que s é substituído por s_1

[6] Pretende-se que o polo, $s = s_1$,seja o polo dominante da função de transferência em cadeia fechada.
[7]Esta raiz da equação característica corresponde a determinadas especificações de “performance”, tais como sobreelevação, tempo de estabelecimento, tempo de subida.

$$K_d s_1^2 + K_p s_1 + K_i = \frac{s_1 e^{j\theta}}{M} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K_d |s_1|^2 (\cos 2\beta + j\mathrm{sen}\, 2\beta) + K_p |s_1| (\cos\beta + j\mathrm{sen}\,\beta) + K_i = \frac{s_1}{M}\left[\cos(\beta+\theta) + j\mathrm{sen}(\beta+\theta)\right] \qquad (1\text{-}13)$$

expressão que na forma matricial é dada por:

$$\begin{bmatrix} |s_1|^2 \cos 2\beta & |s_1|\cos\beta \\ |s_1|^2 \mathrm{sen}\, 2\beta & |s_1|\mathrm{sen}\,\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_d \\ K_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{|s_1|}{M}\cos(\beta+\theta) - K_i \\ \frac{|s_1|}{M}\mathrm{sen}(\beta+\theta) \end{bmatrix}. \qquad (1\text{-}14)$$

Resolvendo este sistema de equações para K_p e K_d em função de K_i obtém-se:

$$K_p = \frac{\mathrm{sen}(\beta-\theta)}{M\,\mathrm{sen}\beta} - \frac{2K_i\cos\beta}{|s_1|};$$
$$K_d = \frac{\mathrm{sen}\theta}{|s_1| M\,\mathrm{sen}\beta} + \frac{K_i}{|s_1|^2}. \qquad (1\text{-}15)$$

Uma vez que se deseja que o ponto s_1 faça parte do Root-Locus, deve-se verificar a seguinte relação:

$$G_c(s_1)G_p(s_1)H(s_1) = -1 \qquad (1\text{-}16)$$

que, comparando com (1-10), permite concluir o seguinte:

$$\alpha = 1;$$
$$\gamma = 180^o;$$
$$\theta = \gamma - \psi = 180^o - \phi(G_p(s_1)). \qquad (1\text{-}17)$$

Por substituição destes valores em (1-15) chega-se ao resultado desejado, **cqd.**

Uma vez que temos duas equações para três incógnitas, uma delas terá de ser determinada antes de se poder calcular as duas outras. O valor do parâmetro K_i deve resultar da especificação do erro em estado estacionário.

Estas equações podem igualmente ser utilizadas no projecto de controladores PI e PD, desde que o parâmetro adequado seja anulado.

BIBLIOGRAFIA

1. Bateson, *Introduction to Control System Tecnology*, Macmillan Publishing Company, 1993

2. Martins de Carvalho, *Dynamical Systems and Automatic Control*, Prentice Hall, 1993

3. Considine, *Process Instruments and Controls Handbook*, Mcgraw-Hill, 1990

4. Johnson, *Controlo de Processos: Tecnologia da Instrumentação*, Fundação Calouste Gulbenkian, 1990

5. Kuo, *Automatic Control Systems*, Prentice Hall , 1991

6. Ogata, *Modern Control Engineering*, Prentice Hall, 1990

7. Phillips and R. D. Harbor, *Feedback Control Systems*, Prentice Hall, 1991

8. Pollard, *Process Control*, Heinemann Educational Books, 1981